21/03/2016

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$, με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) \in \mathbb{F}[x]$
$\overset{\shortparallel}{\det}(A - xI_\nu)$

Κακό σενάριο.

Το $\chi_A(x)$ ΔΕΝ αναλύεται στο $\mathbb{F}[x]$ σαν γινόμενο πρωτοβαθμίων. Τότε A όχι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$

(π.χ. το $x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ δεν αναλύεται στο $\mathbb{R}[x]$ σε γινόμενο πρωτοβαθμίων)

"Ενδιαφέρον" Σενάριο

Το $\chi_A(x)$ αναλύεται στο $\mathbb{F}[x]$ σε γινόμενο πρωτοβαθμίων έστω

$\chi_A(x) = (-1)^\nu \cdot (x-\lambda_1)^{a_1} \cdot (x-\lambda_2)^{a_2} \cdots (x-\lambda_r)^{a_r}$,

με $a_i \geq 1$, $\lambda_i \in \mathbb{F}$ και $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$

(το a_i είναι η αλγεβρ. πολ/τητα της ιδιοτιμής λ_i του A)

Δύο περιπτώσεις

a) $a_i = 1 \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, r$

δηλ. το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αναλύεται στο $\mathbb{F}[x]$ σε γινόμενο πρωτοβαθμίων με διαφορετικές ρίζες ανά δύο

(π.χ. αν $\chi_A(x) = (-1)^3 \cdot (x-1)(x-3)(x-\pi) \in \mathbb{R}[x]$

Ισχυρισμός

Τοτε ~~....~~ A διαγωνιοποιησιμος επι του IF (Αποδ. Ξερουμε οτι ∀ ιδιοτιμη λ του A $1 \leq$ γεωμ. πολλαπλ. του $1 \leq a_i$

Αρα $a_i = 1 \Rightarrow 1 =$ γεωμ. πολ/τητα του $\lambda_i =$ αλγ. πολ/τητα του λ_i) και αρα απο τον ορισμό A διαγωνιοποιησιμος.

π.χ

αν $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $\chi_A(x) = (x-1)(x-3) \in \mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow$ A διαγωνιοποιησιμος απο τον ισχυρισμό.

Παρατηρηση

b) Υπαρχει i ωστε $a_i \geq 2$ Τοτε δεν ξερουμε σε αυτο το σημειο αν ο A ειναι διαγωνιοποιησιμος)

Μπορει να ειναι (π.χ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\chi_A(x) = (x-1)^2$ και A ειναι διαγωνιοποιησιμος)

Μπορει ομως και να μην ειναι

(π.χ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\chi_B(x) = (x-1)^2$ αλλα

ειδαμε οτι ο B δεν ειναι διαγωνιοποιησιμος

π.χ

Εστω $a \in \mathbb{R}$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Για ποιες τιμες του a ειναι ο A διαγωνιοποιησιμος επι του $\mathbb{R}$;

Λύση

$\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \dots = x^2 - 2x + (1-a)$
$\in \mathbb{R}[x]$

→ Διακρίνουσα $= (-2)^2 - 4(1-a) = 4a$

Περίπτωση (1)

$\Delta < 0$ Τότε $\chi_A(x)$ δεν έχει $\mathbb{R}$ ρίζες, άρα δεν αναλύεται (στο $\mathbb{R}[x]$) σε γινόμενο πρωτοβαθμίων. Άρα A όχι διαγωνίσιμος

Περίπτωση (2)

$\Delta = 0$ άρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ με $\chi_A(x) = (x-1)^2$

Μετά τις πράξεις ⇝

⇝ $V_A(1)$ = είναι 1-διάστατος με βάση $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Άρα 2 = αλγ. πολλαπλ. της ιδιοτιμής 1 ≠
1 = γεωμ. " " 1. Άρα A όχι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$

Περίπτωση (3)

$\Delta > 0$, άρα το $\chi_A(x)$ έχει δύο διαφορεττιμές ρίζες στο $\mathbb{R}$. Επομένως από του ισχυρισμός A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$.

<u>Άσκηση</u>

Έστω $a \in \mathbb{C}$, και $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

Για ποιές τιμές του a είναι ο A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{C}$;

<u>Ιδιοδιανύσματα</u>

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\bar{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu}$

Το $\bar{z}$ ~~λέγεται~~ λέγεται Ιδιοδιάνυσμα του A αν $\bar{z} \neq \mathbb{O}_{\nu\times\nu}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ ώστε $A\bar{z} = \lambda\bar{z}$.

<u>Π.χ</u>

Είναι το $\bar{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

Είναι το $\bar{z}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα του A;

<u>Λύση</u>

Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε $A\bar{z} = \lambda\bar{z} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 3 = 3\lambda$

Άρα για $\lambda = 1$ έχουμε $A\bar{z} = \lambda\bar{z}$, και αφού $\bar{z} \neq \mathbb{O}_{2\times 1}$ έπεται $\bar{z}$ ιδιοδιάνυσμα του A (για $\lambda = 1$)

Απάντηση. Για $\lambda \in \mathbb{F}$

$A\xi' = \lambda\xi' \Leftrightarrow A\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} =$

$= \lambda\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\lambda\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3=0\\3=3\lambda\end{cases}$ που

είναι αδύνατο γιατί (στο $\mathbb{R}$) $3 \neq 0$. Άρα

$\nexists\ \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $A\xi' = \lambda\xi' = \xi'$ όχι

ιδιοδιάνυσμα του A

Παρατήρηση. Έστω $\xi \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ ιδιοδιάνυσμα για

τον $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$

Τότε $A\xi = \lambda\xi \Rightarrow A\xi - \lambda\xi = \mathbb{O}_{\nu \times 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A - \lambda I_\nu) = \mathbb{O}_{\nu \times 1}$

Άρα το ομογενές γραμμικό σύστημα

$(A - \lambda I_\nu)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_\nu\end{pmatrix} = \mathbb{O}_{\nu \times 1}$ ν εξισώσεων με ν

αγνώστους έχει και μη τετριμμένη λύση.

Άρα από Γ.Α(Ι), $\det(A - \lambda I_\nu) = 0 \Rightarrow$

λ ιδιοτιμή του A. και $\xi \in V_A(\lambda)$

Αντίστροφα, αν λ ιδιοτιμή του A, κάθε

μη μηδενικό στοιχείο του ιδιοχώρου $V_A(\lambda)$

είναι ιδιοδιάνυσμα του A. Άρα $\left\{\begin{matrix}\text{ιδιοδιανύσματα}\\ \text{του } A\end{matrix}\right\} =$

$$\bigcup_{\lambda \text{ ιδιοτιμή του } A} \left(V_A(\lambda) \setminus \{\mathbb{O}_{\nu \times 1}\}\right) \quad (*)$$

Από την (*) και τους ορισμούς, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ ΤΑΕΙ

i) A διαγωνιοποιήσιμος επί του $\mathbb{F}$

ii) Υπάρχει βάση $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_\nu$ του διαν. χώρου $\mathbb{F}^{\nu \times 1}$ με την ιδιότητα $\forall$ $\mathfrak{z}_i$ να είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

<u>Πρόταση</u>

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Δηλαδή έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ιδιοτιμές του A με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$ και $\mathfrak{z}_i \in V_A(\lambda_i) \setminus \{0_{\nu \times 1}\}$ για $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Τότε το σύνολο $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_p$ του $\mathbb{F}^{\nu \times 1}$ είναι γραμμ. ανεξ.

<u>Απόδειξη</u>

(για $p = 2$) Έστω λ_1, λ_2 ιδιοτιμές του A με $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mathfrak{z}_1 \in V_A(\lambda_1)$

$\mathfrak{z}_2 \in V_A(\lambda_2)$ με $\mathfrak{z}_1$ και $\mathfrak{z}_2$ μη μηδενικά.

Υποθέτουμε $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{F}$ με

$\mu_1 \mathfrak{z}_1 + \mu_2 \mathfrak{z}_2 = 0_{\nu \times 1}$ (**)

πολλαπλ. την (**)

Από τα αριστερά με A παίρνουμε

$A(\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2) = A\, 0_{\nu\times 1} = 0_{\nu\times 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_1 A \xi_1 + \mu_2 A \xi_2 = 0_{\nu\times 1}$

$\Rightarrow \boxed{\mu_1 \lambda_1 \xi_1 + \mu_2 \lambda_2 \xi_2 = 0_{\nu\times 1}}$ $(* * *)$

$(***) - \lambda_1 \cdot (**) \Rightarrow \mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)\xi_2 = 0_{\nu\times 1}$

$\overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Rightarrow}$ $\mu_2 = 0_{\mathbb{F}}$

του

$\xi_2 \neq 0_{\nu\times 1}$

όμοια

$(***) - \lambda_2 (**) \Rightarrow \mu_1 = 0_{\mathbb{F}}$

Άρα ξ_1, ξ_2 γραμ. ανεξ.

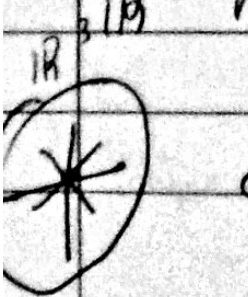
Υπενθ. Στην Γραμ. Αλγ. I ορίσαμε την έννοια $V = W_1 \oplus W_2$ όπου V διαν. χώρος (επί του $\mathbb{F}$) και W_1, W_2 υπόχωροι του V

Πιο γενικά, έστω V δ.χ. και $W_1, W_2, \ldots, W_p$ υπόχωροι του V. Λέμε ότι το άθροισμα των $W_1, \ldots, W_p$ είναι ευθύ αν ισχύει το εξής: Έστω $w_i \in W_i$ για $i = 1, 2, \ldots, p$. Τότε $w_1 + w_2 + \ldots + w_p = 0_V \Rightarrow w_i = 0_{W_i}$ $\forall i$

π.χ.

Έστω $V = \mathbb{R}^3$, W_1, W_2, W_3 τρείς μονοδιάστατοι υπόχωροι δηλ. 3 ευθείες στο $\mathbb{R}^3$ που περνούν από την αρχή των αξόνων

$\mathbb{R}^3$



Υποθ. $W_1 \neq W_2$. Τότε ο υπόχωρος $W_1 + W_2$ είναι το επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ που περνά από την αρχή των αξόνων και περιέχει τις ευθείες ω_1 και ω_2. Αν τους ορίσουμε το άθροισμα $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ είναι ευθύ αν και μόνο αν η ευθεία ω_3 ΔΕΝ περιέχεται στο επίπεδο $\omega_1+\omega_2$

Πόρισμα:

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ ιδιοτιμές του A με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i\neq j$. Τότε το άθροισμα των ιδιοχώρων $V_A(\lambda_1), V_A(\lambda_2), \dots, V_A(\lambda_p)$ είναι ευθύ

#2

① Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Δείξτε ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές

Λύση (προσοχή. Μπορεί AB και BA όχι όμοιοι

π.χ. $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$

τότε $AB=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ που δεν είναι όμοιοι) γιατί $P\in\mathbb{R}^{2\times2}$ αντιστρ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow P^{-1}(BA)P=\mathbb{O}_{2\times2}$)

Έστω λ ιδιοτιμή του AB. Θ.δ.ο λ ιδιοτιμή του BA

Περίπτ. ①

$\lambda = 0 \Rightarrow 0$ ιδιοτιμή $AB \Leftrightarrow AB$ όχι αντιστρέψι-
μος $\Rightarrow \det(AB) = 0 \Rightarrow \det A \cdot \det B = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \det(BA) = 0 \Rightarrow BA$ όχι
αντιστρ. $\Rightarrow 0$ ιδιοτιμή του BA.

Περίπτ. ②

$\lambda \neq 0$. Αφού λ ιδιοτιμή, $\dim V_A(\lambda) \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \xi \in \mathbb{F}^{\nu \times 1}$ μη μηδενικό με $(AB)\xi = \lambda \xi \neq 0$
(μαζί $\lambda \neq 0_{\mathbb{F}}$, $\xi \neq 0_{\mathbb{F}}$). Άρα $B \cdot \xi \neq 0_{\nu \times 1}$.
Έχουμε

$$(BA)(B\xi) = B(AB\xi) = B(\lambda\xi) = \lambda(B\xi)$$

$\Rightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του BA.

Άρα δείξαμε κάθε ιδιοτιμή του AB είναι και ιδιοτιμή του BA. Λόγω συμμετρίας ισχύει και το αντίστροφο. (Αν δεν θέλαμε να χρησιμοποιούμε συμμετρία, κάναμε τα ίδια επιχειρήματα με το A στη θέση του B και το B στη θέση του A)